TITLE:
ある種の多重特性的擬微分方程式系の解の特異性の分岐 (微分方程式の超局所解析)

AUTHOR(S):
大阿久, 俊則

CITATION:
大阿久, 俊則. ある種の多重特性的擬微分方程式系の解の特異性の分岐 (微分方程式の超局所解析). 数理解析研究所講究録 1981, 431: 109-118

ISSUE DATE:
1981-06

URL:
http://hdl.handle.net/2433/102681

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
431巻 1981年 109-118

ある種の多重特性的擬微分方程式系の解の特異性の分岐

東大 理　　大阿久 俊則

§0. 序.　佐藤-河合-柏原[9]は擬微分方程式系の解の構造を調べるために，方程式系を量子化接触変換によって簡単な形に変換するという方法を用い，方程式系の台（＝特性多様体）が正則包合的という仮定のもとで，方程式系（及びその解）の構造をほぼ完全に決定した．しかしながら，方程式系の台が正則包合的でない場合には事態は困難であり，極大過剰決定系の場合（[3]，[8]）を除くと，従来（複素領域での）擬微分方程式系の構造が決定されているのは，主に次の2つの場合である：

（1）方程式系が極大退化な多様体に沿って確定特異点型の場合（大島[7]，柏原-大島[5]）.

（2）方程式系の未知函数が1個でその symbol ideal が reduced，かつ方程式系の台が $V = V_1 \cup V_2$（V_1，V_2 は正則包合的，正規交叉，交わりは余次元1かつ"非包合的"）と書ける場

合（柏原－河合－大島［4］）.

本稿では，§1で上記（2）の場合の結果（［4］の Theorem 3）を，方程式系の未知函数の個数が任意で，V に沿って確定特異点型の場合に拡張する。その結果を用いて，§2 では解の特異性の分岐を調べる。これは Ivrii［2］と Hanges［1］の単独方程式に対する結果の解析的カテゴリーでの類似の,方程式系への拡張である。詳細については［6］を参照されたい。

§1. 方程式系の標準形.

（記号）　∘ X ; n次元複素多様体

∘ $z = (z_1, \cdots, z_n)$: X の局所座標

∘ $(z, \langle \zeta, dz \rangle) = (z, \zeta) = (z_1, \cdots, z_n, \zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in T^*X$

∘ $\mathcal{E}_X$; T^*X 上の有限階擬微分作用素の層

∘ $\mathcal{E}(j) = \{ P \in \mathcal{E}_X ; \operatorname{ord} P \leq j \}$

∘ $\mathcal{O}(j)$: ζ に関して j 次斉次な T^*X 上の正則函数の層

∘ $\sigma_j : \mathcal{E}(j) \longrightarrow \mathcal{O}(j) \cong \mathcal{E}(j)/\mathcal{E}(j-1)$

∘ T^*X の斉次包合的 analytic set V に対して，

$\mathcal{J}_V = \{ P \in \mathcal{E}(1) ; \sigma_1(P)|_V = 0 \}$,

$\mathcal{E}_V$: $\mathcal{J}_V$ の生成する $\mathcal{E}_X$ の subring

∘ $\omega = \zeta_1 dz_1 + \cdots + \zeta_n dz_n$; T^*X 上の基本1次形式

∘ T^*X の部分多様体 W に対して，

$$\mathrm{rank}\, W = 2r \underset{\mathrm{def.}}{\iff} \forall p \in W \text{ に対して, } \mathrm{rank}(d\omega|_{T_pW}) = 2r.$$

（仮定）$\mathcal{M}$ を $T^*X - X$ の開集合 Ω 上で定義された coherent $\mathcal{E}_X$ - module（i.e. 擬微分方程式系）とし，$V = V_1 \cup V_2$ を Ω の analytic set とする。以下では，次の（A.1）〜（A.6）を仮定する：

（A.1） V_1 と V_2 は Ω の余次元 d の斉次正則包合的部分多様体で，$V_0 = V_1 \cap V_2$ は非特異．

（A.2） V_1，V_2 は正規交叉，即ち，$T_pV_1 \cap T_pV_2 = T_pV_0$ が任意の $p \in V_0$ に対して成立する．

（A.3） $\dim V_1 = \dim V_2 = \dim V_0 + 1$．

（A.4） $\mathrm{rank}\, V_1 = \mathrm{rank}\, V_2 = \mathrm{rank}\, V_0$．

（A.5） $\mathcal{M}$ は V に沿って確定特異点型，即ち，$\mathcal{M}$ の任意の連接的部分 $\mathcal{E}_V$ - 加群は $\mathcal{E}(0)$ 上連接的．（［5］，［3］を参照）

以下，$p_0 \in V_0$ を固定する。このとき，p_0 の近傍 U と $\mathcal{M}|_U$ の連接的部分 $\mathcal{E}_V$ - 加群 $\mathcal{M}_0$ が存在して，$\mathcal{E}_X \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}|_U$ が成立する．（A.5）により，$\overline{\mathcal{M}}_0 \underset{\mathrm{def.}}{=} \mathcal{M}_0 / \mathcal{E}(-1)\mathcal{M}_0$ は連接的 $\mathcal{O}_V(0)$ - 加群（$\mathcal{O}_V(0) = \mathcal{O}(0) / \{f \in \mathcal{O}(0) ; f|_V = 0\}$）であるが，さらに次を仮定する：

（A.6） $\overline{\mathcal{M}}_0$ は階数 m の局所自由 $\mathcal{O}_V(0)$ - 加群．

さて，（A.6）により，$\mathcal{M}_0$ の $\mathcal{E}(0)$ 上の局所生成元 $u_1, \cdots, u_m$ で

その $\overline{\mathcal{M}}_0$ での剰余類が $\mathcal{O}_V(0)$ 上の自由生成元となるものが存在する。(A.1) ~ (A.4) により，p_0 の近傍で，$\sigma(P_j)|_{V_j}=0$ $(j=1,2)$ 及び $\{\sigma(P_1),\sigma(P_2)\}(p_0)\neq 0$ をみたす擬微分作用素 P_1, P_2 が存在する。 $\mathrm{ord}\,P_j=\ell_j$ $(j=1,2)$, $\ell=\ell_1+\ell_2$ とおくと，(A.5) により，p_0 の近傍で，

$$P_1P_2u_i=\sum_{j=1}^{m}A_{ij}u_j \quad (i=1,\cdots,m)$$

なる $A_{ij}\in\mathcal{E}(\ell-1)$ をとれる。

$$a_{ij}=\sigma_{\ell-1}(A_{ij})(p_0)/\{\sigma(P_1),\sigma(P_2)\}(p_0)$$

とおき，λ の多項式 $e_{12}(\lambda,p_0,\mathcal{M}_0)$ を，

$$e_{12}(\lambda,p_0,\mathcal{M}_0)=\det\left(\lambda I_m+(a_{ij})_{1\leq i,j\leq m}\right)$$

により定義しよう。(I_m は m 次単位行列) e_{12} は上の P_1, P_2，及び $u_1,\cdots,u_m$ にはよらず，p_0 と $\mathcal{M}_0$ で決まることは容易に確かめ得る。$e_{12}(\lambda,p_0,\mathcal{M}_0)=0$ の根を $\lambda=\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ として，$J(\lambda)=\{j\in\{1,\cdots,m\};\ \lambda_j-\lambda\in\mathbb{Z}\}$, $m(\lambda)=\#J(\lambda)$ とおこう。さらに，$J(0,1)=\{j\in J(0);\ \lambda_j<0\}$, $J(0,2)=\{j\in J(0);\ \lambda_j\geqq 0\}$, $m(0,i)=\#J(0,i)$ $(i=1,2)$ とする。$\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{C};\ -1<\mathrm{Re}\,\lambda\leqq 0,\ J(\lambda)\neq\phi\}$ とおくと，$m=\sum_{\lambda\in\Lambda}m(\lambda)$, $m(0)=m(0,1)+m(0,2)$ が成立する。 $D_j=\partial/\partial z_j$ として，$D=(D_1,\cdots,D_n)$, $z'=(z_{d+1},\cdots,z_n)$, $D'=(D_{d+1},\cdots,D_n)$ と書く。

(結果) 仮定 (A.1) ~ (A.6) 及び上の記号のもとで，次の

定理を得る：

<u>定理1.</u> p_0の近傍で定義されたT^*Xの接触変換φと，それに付随した量子化接触変換Φが存在して，$\mathcal{M}$は（$\mathcal{E}_X$-加群として）$\Phi(\mathcal{N})$に同型．ここで，$\mathcal{N}$は$\varphi(p_0)=(0, dz_n)$の近傍で定義された方程式系で，

$$\begin{cases} \mathcal{N} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{N}_\lambda , \\ \mathcal{N}_\lambda : (z_1 D_1 I_{m(\lambda)} - A_\lambda) v_\lambda = D_2 v_\lambda = \cdots = D_d v_\lambda = 0 \end{cases}$$

と表わされる．（A_λは高々0階の擬微分作用素からなる$(m(\lambda), m(\lambda))$行列，v_λは$m(\lambda)$個の未知函数からなる縦ベクトル）更に，$\lambda\neq 0$のとき，$A_\lambda = A_\lambda(z', D')$と書け（i.e. $z_1, \cdots, z_d$, $D_1, \cdots, D_d$を含まない）；$\lambda = 0$のときは，

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_{11}(z', D') & A_{12}(z', D') D_1 \\ z_1 A_{21}(z', D') & A_{22}(z', D') \end{pmatrix}$$

と書ける。（A_{ij}は擬微分作用素の$(m(0,i), m(0,j))$行列）また，$\lambda\neq 0$のとき，$\sigma_0(A_\lambda)(0, dz_n)$の固有値はすべて$\lambda$に等しく，$\sigma_0(A_{11})(0, dz_n)$の固有値はすべて$-1$，$\sigma_0(A_{22})(0, dz_n)$の固有値はすべて0である．

<u>Remark.</u> $m=1$の場合には，この定理は柏原-河合-大島（[4]の Theorem 3）による。この定理の証明は，柏原-大島[5]の Theorem 3.2 の証明と類似の逐次近似法による．

§2. 特異性の分岐

Mをn次元実解析的多様体，Xをその複素化とする。$T^*_M X \cong \sqrt{-1}\,T^*M$ 上のマイクロ函数の層を $\mathcal{C}_M$ で表わす．$\mathcal{M}$ を $T^*X - X$ の開集合Ω上で定義された連接的$\mathcal{E}_X$-加群，$V = V_1 \cup V_2$ をΩの斉次包合的解析的集合とし，$\mathcal{M}$とVは条件 (A.1)～(A.6) をみたすと仮定する。以下では更に次を仮定する：

(A.7) V_1とV_2は実，即ち，V_j $(j=1,2)$は実解析的多様体 $V_j^{\mathbb{R}} \underset{\text{df.}}{=} V_j \cap T^*_M X$ の複素化．

$p_0 \in V_0^{\mathbb{R}} = V_1^{\mathbb{R}} \cap V_2^{\mathbb{R}}$ を固定し，$e_{12}(\lambda, p_0, m_0) = 0$ の根を $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ とおく．

定理2. (A.1)～(A.7) のもとで，$\lambda_j \notin \{-1, -2, \cdots\}$ $(j=1,\cdots,m)$ を仮定する。このとき，

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \Gamma_{V_1^{\mathbb{R}}}(\mathcal{C}_M))_{p_0} = 0 .$$

さらに，$\lambda_j \notin \mathbb{Z}$ $(j=1,\cdots,m)$を仮定すれば，

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \Gamma_{V_1^{\mathbb{R}}}(\mathcal{C}_M))_{p_0} = 0 \quad (i \in \mathbb{Z}) .$$

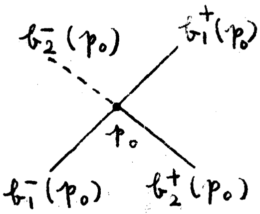
さて，p_0を通る$V_j^{\mathbb{R}}$の陪特性体を$b_j(p_0)$で表わそう．$(j=1,2)$ すると，(A.1)～(A.4)により，$b_1(p_0)$，$b_2(p_0)$はd次元実解析的多様体で，余次元1で交わる。従って，$b_j(p_0) - V_0^{\mathbb{R}}$ は2つの連結成分からなる。それらを $b_j^+(p_0)$，$b_j^-(p_0)$で

表わそう．（$b_j^+(p_0)$ と $b_j^-(p_0)$ の選び方は任意）

<u>定理3.</u> 条件 (A.1) ～ (A.7) と条件 $\lambda_j \notin \{-1,-2,\cdots\}$ ($j=1,\cdots,m$) を仮定する．このとき，f が p_0 の近傍での $\mathcal{M}$ のマイクロ函数解で，

$$\mathrm{supp}\, f \cap b_2^-(p_0) = \emptyset, \text{ かつ } f \neq 0 \ \text{ at } p_0$$

をみたせば，$b_1(p_0) \cup b_2^+(p_0)$ は p_0 の近傍で f の台 $\mathrm{supp}\, f$ に含まれる．



次に，台が小さな解を構成する問題を考える．$T^*_M X$ の部分集合 S に対して，$\mathbb{R}^+ S = \{cp \,;\ c \in \mathbb{R},\ c > 0,\ p \in S\}$ とおく．

<u>定理4.</u> 条件 (A.1) ～ (A.7) のもとで，p_0 の（$T^*_M X$ での）開近傍 U' と，U' 上定義された $\mathcal{M}$ のマイクロ函数解 f で次をみたすものが存在する：

$$\mathbb{R}^+ b_1(p_0) \cap U' \subset \mathrm{supp}\, f \subset \mathbb{R}^+ (b_1(p_0) \cup b_2^+(p_0)) \cap U'.$$

さらに，ある $j \in \{1,\cdots,m\}$ について，$\lambda_j \notin \{-1,-2,\cdots\}$ が成り立てば，f は次をみたすようにとれる：

$$\mathrm{supp}\, f = \mathbb{R}^+ (b_1(p_0) \cup b_2^+(p_0)) \cap U'.$$

Remark. 条件 $\lambda_j \notin \{-1,-2,\cdots\}$ を条件 $\lambda_j \notin \{0,1,2,\cdots\}$ で置き換えれば，定理２～４において，$V_1^{\mathbb{R}}$ と $V_2^{\mathbb{R}}$ の役割を交換した陳述が成立する。

系. P_1, P_2 は $p_0 \in \sqrt{-1}\,T^*\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^n$ の近傍で定義された，それぞれ ℓ_1 階，ℓ_2 階の（解析的）擬微分作用素で，

$$\begin{cases} \sigma(P_1)(p_0) = \sigma(P_2)(p_0) = 0, \\ \{\sigma(P_1), \sigma(P_2)\}(p_0) \neq 0 \end{cases}$$

なるものとする。（$\{\ \}$ は Poisson bracket）さらに，$\sigma(P_1)$, $\sigma(P_2)$ は $\sqrt{-1}\,T^*\mathbb{R}^n$ 上実数値（or 純虚数値）をとると仮定する。$\ell = \ell_1 + \ell_2$ とおき，A を p_0 の近傍で定義された高々 $\ell-1$ 階の擬微分作用素からなる (m, m) 行列とする。p_0 を通る P_1, P_2 の陪特性帯を $b_1(p_0)$, $b_2(p_0)$ とし，$b_j(p_0) - \{p_0\}$ の連結成分を $b_j^+(p_0)$, $b_j^-(p_0)$ とする。また，行列 $\sigma_{\ell-1}(A)(p_0) / \{\sigma(P_1), \sigma(P_2)\}(p_0)$ は整数値の固有値を持たないと仮定する。以上の仮定のもとで，$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_M^m$ が p_0 の近傍で，

$$(P_1 P_2 I_m + A) f = 0$$

をみたし，かつ f が $b_1^+(p_0)$, $b_1^-(p_0)$, $b_2^+(p_0)$, $b_2^-(p_0)$ のうち少くとも２つの上で消えれば，f は p_0 の近傍で消える。

Remark. $m=1$, 即ち単独方程式の場合には, この系の C^∞ 版は, Ivrii [2] と Hanges [1] により得られている。

References

[1] Hanges, N.: Parametrices and propagation of singularities for operators with non-involutive characteristics. Indiana Univ. Math. J. 28, 87-97 (1979).

[2] Ivrii, V. Ya.: Wave fronts of solutions of certain pseudodifferential equations. Functional Anal. Appl. 10, 141-142 (1976).

[3] Kashiwara, M., Kawai, T.: On holonomic systems of micro-differential equations, III (to appear).

[4] Kashiwara, M., Kawai, T., Oshima, T.: Structure of cohomology groups whose coefficients are microfunction solution sheaves of systems of pseudo-differential equations with multiple characteristics, I. Proc. Japan Acad. 50, 420-425 (1974).

[5] Kashiwara, M., Oshima, T.: Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems. Ann. of Math. 106, 145-200 (1977).

[6] Ôaku, T.: A canonical form of a system of microdifferential equations with non-involutory characteristics and branching of singularities (to appear).

[7] Oshima, T.: Singularities in contact geometry and degenerate pseudo-differential equations. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 21, 43-83 (1974).

[8] Sato, M., Kashiwara, M., Kimura, T., Oshima, T.: Micro-local analysis of prehomogeneous vector spaces. Inventiones math. 62, 117-179 (1980).

[9] Sato, M., Kawai, T., Kashiwara, M.: Microfunctions and pseudo-differential equations. Lecture Notes in Math. Vol. 287, pp. 265-529, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1973).